FRACTAIS - NÚMEROS COMPLEXOS

Autor: Diego Mubarack de Melo

· **INTRODUÇÃO:**

O surgimento dos números complexos

Cardano 1545 ao tentar resolver a cúbica $x^3=4+15x$, a qual ele sabia ter raiz verdadeira x=4, contatou que a regra de Dal Ferr-Tartaglia produzia a seguinte expressão (*em notação moderna*):

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Deparando-se com a $\sqrt{-121}$ ele não achou um modo prático de resolvê-la e destravar assim o cálculo fazendo com que chegue no resultado x=4

Vinte e cinco anos depois Rafael Bombelli, em 1572, achou uma possível solução para o problema de Cardano, tendo assim a idéia louca de trabalhar com quantidades da forma **a+b**$\sqrt{-1}$ sob as mesmas condições que usam para números reais mais a propriedade $(\sqrt{-1})^2=-1$ para assim conseguir chegar ao tão esperado número x=4.

No início, o próprio Bombelli duvidou muito sobre a utilização dessa teoria, diante dos demais matemáticos da época, os números de Bombelli, eram vistos com suspeita mas tolerados, sendo *batizado* de **Números Sofísticos**.

A situação dos números complexos demorou cerca de 300 anos para ser concluída e ser aceita por todos os matemáticos do mundo e é a forma que hoje conhecemos e estudamos.

Euler, Leibniz e J. Bernoulli também estiveram nesse intervalo de 300 anos ajudando na conclusão dos números complexos. Juntos, desenvolveram um estudo profundo encima de operações transcedentais ligados à números complexos.

Bombeli alegava que $1^2=(-1)^2$, logo, obtemos que $\ln(-1)=0$. Para Leibniz isto estava errado uma vez que teríamos, $\ln(-1)=0$, que $-1=e^{\circ}=1$.

Em 1797, Wessel introduziu a moderna representação geométrica que, em 1830 foi popularizada por Mourey e Gauss, este último, Gauss, que utilizou esta representação e demonstrou que os números complexos são necessários e suficiente para a Álgebra (*Teorema Fundamental da Álgebra: todo polinômio de coeficientes reais ou complexos pode ser fatorado em termos lineares, possivelmente complexos).*

Com isso a terminologia desconfiada inicial (números sofísticos em 1570 e números imaginário em 1650) acabou cedendo lugar à mais natural denominação utilizada até os dias de hoje: números complexos, em 1830.

No Século XIX, os números complexos já eram utilizados em outras áreas, foram desenvolvidos estudos em Mecânica de Fluídos, Eletricidade e outros meios contínuos. Hoje, são instrumentos absolutamente necessário em inúmeros campos da Ciência e da Tecnologia.

Aqui estarei falando um pouco sobre a aplicação que Benoît Mandelbrot achou para os números complexos, as imagens fractais.

O QUE SÃO FRACTAIS?

Essa geometria nada convencional tem suas raízes no século XIX e algumas indicações de estudos já na época da Grécia Homérica, Índia, China entre outras civilizações de um passado bem remoto. Porém, essa nova geometria, vem se consolidando a cada dia graças ao avanço da informática e o auxílio de novas teorias nas áreas de Física, Matemática, Biologia, Astronomia e outras ciências.

Ao contrário das outras teorias matemáticas e físicas, os fractais foram nomeados ao invés de serem descobertos, nomeados no início dos anos 80 por Benoît Mandelbrot que foi considerado o *pai dos fractais*. Mandelbrot teve a necessidade de classificar alguns objetos que não possuiam dimensão inteira (1, 2 ou 3) mas sim fracionária (1,85 por exemplo). A palavra *fractal* vem do latin ***fractus*** que significa "quebrado" ou "irregular".

As imagens fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo assim uma aparência consensual. Porém há duas características presentes em todos os fractais: auto-semelhança e complexidade infinita.

Essa nova geometria, a Geometria Fractal, pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos da natureza, onde não se pode utilizar a geometria tradicional.

"Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta."

Benoît Mandelbrot

QUEM FOI BENOÎT MANDELBROT?

Benoît Mandelbrot nasceu a 20 de novembro de 1924 em Varsóvia, Polônia. Filho de uma médica e de comerciante de roupas, Mandelbrot descobre a matemática através de seus dois tios.

Em 1936, a sua família emigra para a França, e o seu tio Szolem Mandelbrot, professor de Matemática no Collège de France, tomou a responsabilidade pela sua educação. Mandelbrot freqüentou a Lucée Rolin em Paris até o início da II Guerra Mundial, altura eu que a sua família mudou para Tulle, no centro da França. Depois de estudar en Lyon, Mandelbrot entrou para a Ecole Normale em Paris, frequentando-a apenas por um dia. Em 1944 inicia os seus estudos na Ecole Polytechnique sob a direção de Paul Lévy.

Depois de completar os seus estudos na Ecole Polytechnique, Maldelbrot parte para os Estados Unidos onde visita a Califórnia Institute of Technology. Daí parte para o Institute for Advanced Study em Princeton, sendo patrocinado por John Von Neumman.

Regressa à França em 1955 onde trabalha no Centre National de la Recherche Scientific, no entanto, em 1958 volta aos Estados Unidos onde inicia a sua colaboração com a IBM. Aqui, Mandelbrot encontra um ambiente que lhe permite explorar uma grande variedade de novas idéias. Em 1945 o seu tio apresentou-lhe alguns idéias de Julia, referente a 1918, dizendo-lhe que eram uma obra de arte e uma potencial fonte de problemas interessantes. No entanto Mandelbrot não gostou. Em vez disso, escolheu um caminho muito diferente que, no entanto o levou, nos anos 70, aos resultados de Julia, é a fonte de alguns dos mais belos fractais hoje conhecidos. Para fazer isto, teve de desenvolver não só novas idéias matemáticas, mas também alguns dos primeiros programas de computador para desenhar gráficos.

O seu trabalho foi primeiro publicado no livro Les objects fratal, forn, hasard et dimension (1975) e mais tarde, de maneira mais completa, no livro The fractal Geometry of nature in 1982.

Além de trabalhar na IBM, no Watson Research Center, Mandelbrot foi professor de matemática em Harvard e na Ecole Polytechnique, professor de engenharia em Yale, professor de Econimia em Harvard e como professor de Fisiologia no Einstein College of Medicine.

Mandelbrot recebeu ainda numerosas honras e prêmio como reconhecimentos dos feitos notáveis. Por exemplo, em 1985 recebe a "Barnard Medl for Meritorious Service to Science". No ano seguinte recebe o Franklin Medal. Em 1987 foi homenageado com o Alexander Von Humbolt Prize, recebendo em 1988 a Steinmetz Medal. Em 1991 recebe a Nevada Medal e em 1993 o prêmio Wolf para a física. A 23 de junho de 1999, Mandelbrot recebe o Honorary Degree of Doctos of Science, atribuído pela University of St. Andrews.

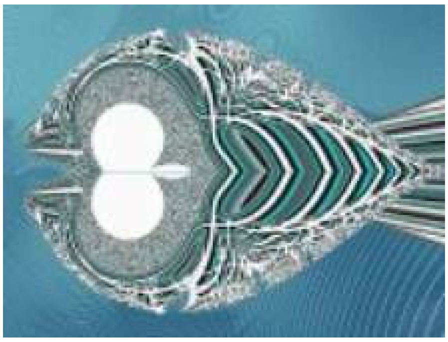
ATRATORES E FRACTAIS

Um atratos é o conjunto de pontos no espaço de fase para o qual um sistema tende a ir à medida que evolui. O atratos pode ser um único ponto, uma curva fechada (ciclo limite) que descreve um sistema de comportamento periódico, ou um fractal (também chamado de atrator estranho), quando o sistema apresenta caos.

Em sistemas caóticos o movimento nunca se repete, apesar de muitas vezes Ter que ocorrer dentro de certos limites. Assim, somente uma figura infinitamente complexa – um fractal – pode dar esta trajetória que nunca se repete no espaço de fase.

CONJUNTO DE MANDELBROT:

É a mais conhecida das imagens fractais. A figura pode ser criada a partir da interação de números complexos, escritos como x+yi onde as ordenadas x (horizontal) e y (vertical) representa duas quantidades independentes (pontos na tela do computador) e a constante i representa a raiz quadrada de –1, um número “imaginário”



A interação é feita com a fórmula:

$z[n+1]= z[n] \times z[n] +c$

Onde z e c são números complexos. O processo é o seguinte: escolha um valor fixo para c, por exemplo c=2 +3i (onde x=2 e y=3) e um valor inicial para z, por exemplo 0 (x=0 e y=0). Calcule o valor seguinte de z representado por z[n+1] utilizando a fórmula acima (e um pouco de álgebra de números complexos...)

Para certos valores de c o resultado converge após algumas interações. O conjunto de Mandelbrot – as porções brancas da figura – é composta pelos pontos para os quais o valor de z é menor que 2 após 150 interações. As outras cores correspondem a regiões para as quais z é maior que 2 após 149, 148, etc. interações.

A propriedade de auto-similaridade do conjunto de Mandelbrot pode ser verificada expandindo algumas áreas da figura. A figura abaixo é uma ampliação da porção à esquerda do círculo intermediário da figura acima. Note que aparece uma estrutura semelhante à que acaba de ser ampliada. Esta repetição prossegue “ad infinitum” em várias regiões da figura.

CURVA DE KOCH:

Uma forma fractal clássica e simples de ser entendida é acurva de Koch. Partindo de um triângulo equilátero divide-se cada lado em três segmentos. Os segmentos intermediários são então substituídos por dois segmentos semelhantes que vêm a formar os lados de um triângulo equilátero menos. Isto resulta numa figura na forma de uma estrela com 12 lados (6 pontas). Realizando o mesmo processo em cada um dos 12 lados e assim sucessivamente obtem-se uma figura em evolução constante que lembra um floco de neve.

O comprimento total do contorno da figura – a soma de todos os lados – cresce à medida que se realizam sucessivas divisões. Após infinitas divisões, seu comprimento será também infinito. No entanto a sua área será sempre menos do que a área de um círculo em torno do triângulo original. No limite, trata-se de uma linha infinitamente longa que delimita uma área infinita.

FRACTAIS NA NATUREZA:

O conjunto de Mandelbrot é uma forma matemática, um fractal “artificial”. No entanto, as formas da Natureza são em geral irregulares, retorcidas, entrelaçadas. O atributo de “natural” de uma paisagem surge na superposição de detalhes irregulares, casuais, às formas geométricas dominantes. Não é raro, estas formas são muito bem descritas como fractais.

A figura abaixo é uma forma matemática de um fractal “artificial” que poderia ser um floco de neve

FRACTAIS DE JULIA:

O Fractal de Julia, em homenagem ao matemático francês *Gaston Julia*, é gerado basicamente pela interação da mesma equação do Conjunto de Mandelbrot: z[n+1]= z[n] x z[n] + c, mas, no Conjunto de Mandelbrot, a cada interação, incrementávamos, ao resultado, o valor do ponto C, que era o ponto que se estava testando, e o ponto Z era iniciado em 0 (Zero). Já no Conjunto de Julia o ponto C é informado e permanece fixo, mas o ponto Z é iniciado com o valor do ponto em que se está testando.

Ao ser criado um programa para desenhar os conjuntos de Julia podemos constatar que, para certos valores de c, os conjuntos não o são. E porquê??? Existe um teorema que nos diz que: *se o pondo c é escolhido no interior do conjunto de Mandelbrot, o correspondente conjunto de Julia é conexo. Se, por outro lado, c é escolhido no exterior do conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia correspondente não é conexo.*

FRACTRAL DE LORENZ:

O atrator de Lorenz é gerado por 3 equações diferenciais não-lineares acopladas:

dx/dt = sigma (y-x)

dy/dt = ró x-y-xz

dz/dt = xy-beta z

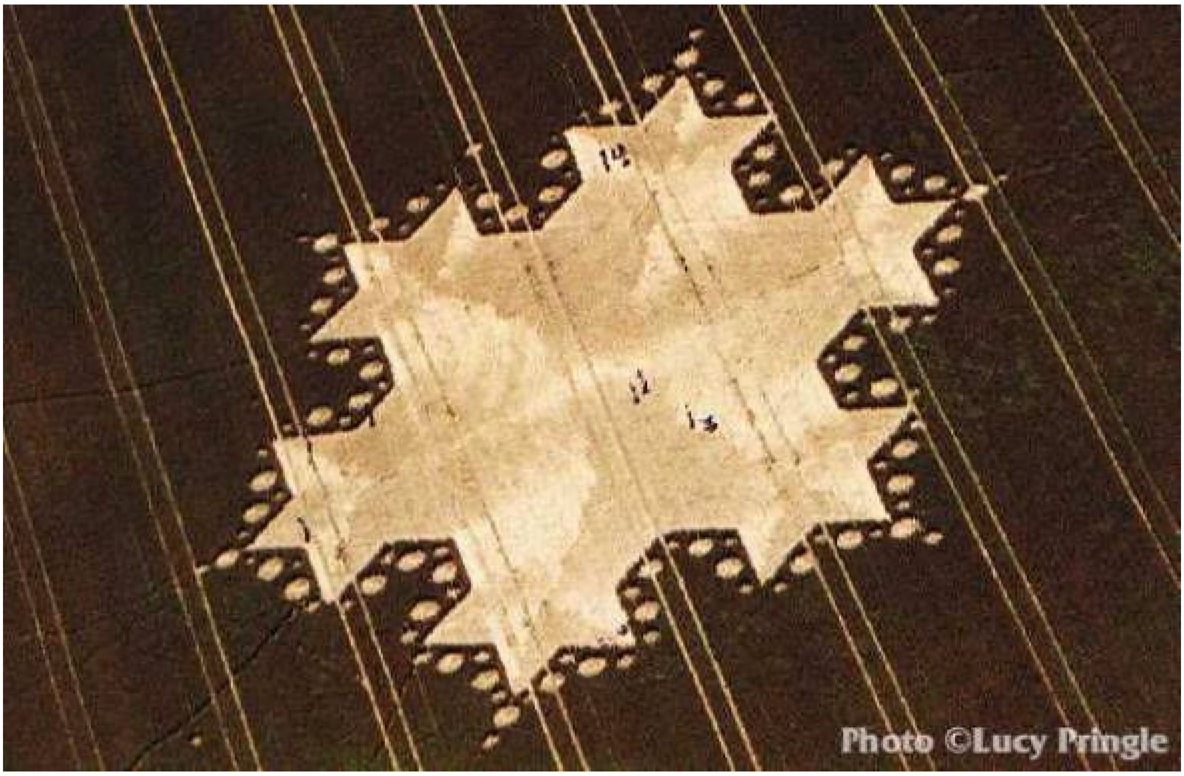
Como esta equação tem termos não-lineares (xy e xz), não existe uma solução analítica e usamos, por isso, uma simulação para numérica para derivar a solução. No écran veremos a representação do comportamento dinâmico do sistema no espaço de fase, a 3 dimensões, a partir do ponto inicial indicado, e para ró=28, sigms=10 e beta=8/3. Acontece que os trajetos a partir de quase todos os pontos iniciais possíveis acabam por “cair” no mesmo conjunto .É por isso que a esse conjunto se chama Atratos. Se clicar seguidamente no écran onde se diz AQUI, verá a evolução a partir de vários pontos diferentes. No entanto, por causa dos seus termos não-lineares, uma pequena variação na localização do ponto inical afeta enormemente o trajeto obtido – uma característica do CAOS, verá simultaneamente duas trajetórias parecem coincidentes mas, a partir de certa altura, a divergência é óbvia” No final, para voltar funcionamento, volte a clicar em Caos.

É a este fenômeno que se chama “o efeito borboleta”:

O efeito borboleta: As equações de Lorenz foram introduzidas, em 1963, como um modelo simples do movimento convectivo nas camadas superiores da atmosfera. Lorenz descobriu que, para certos valores dos parâmetros de ró, beta e sigma, o sistema nunca tende para um comportamento previsível a longo prazo e que, por essa razão, não é possível também fazer previsões do tempo ao longo prazo. Trata-se de um sistema caótico e a mais infinita variação nas condições inicias pode produzir comportamentos a longo prazo muito diferentes. Por isso se pode dizer que, por exemplo, **que o bater de asas de uma borboleta no Porto pode acabar por influenciar o aparecimento de um tufão em Macau***.*

CURIOSIDADE:

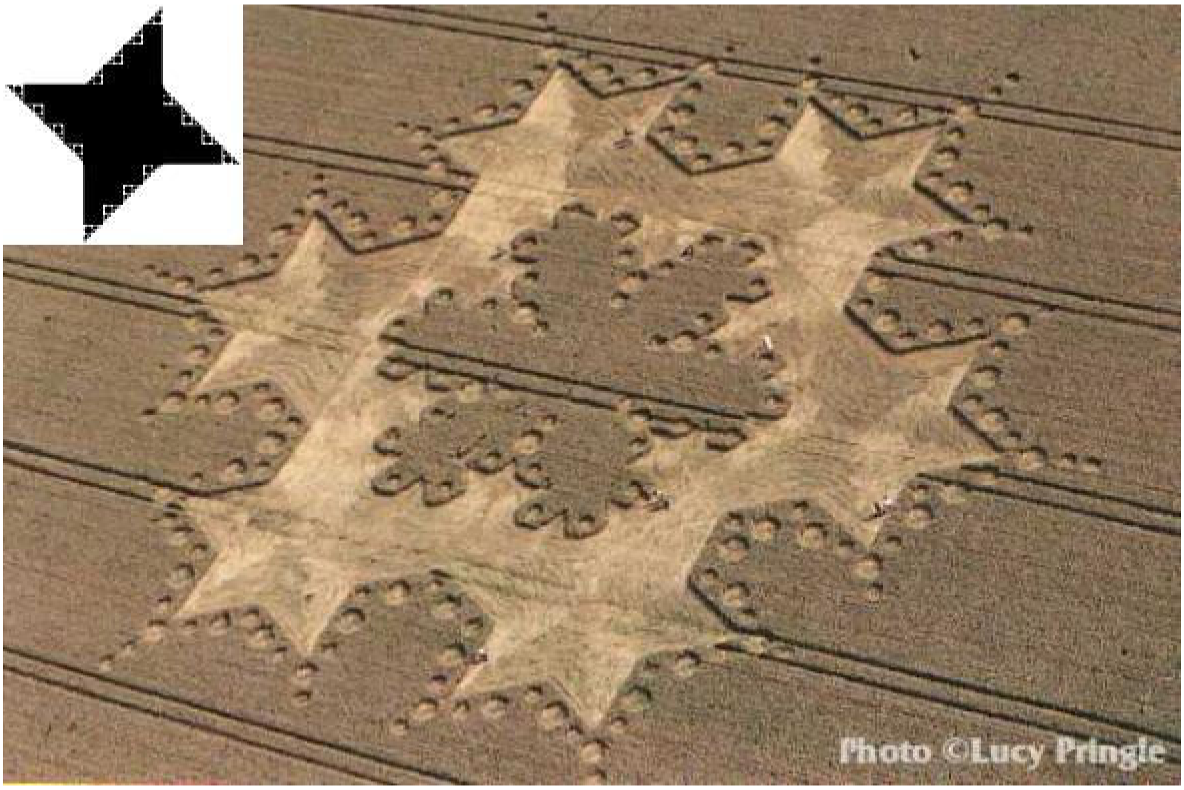
Um fato muito esquisito pode estar ligado diretamente ao assunto dos fractais e, conseqüentemente, aos números complexos, são os famosos Círculos em Plantações, com suas origens supostamente ligadas a vidas extraterrestres, vejamos alguns casos:



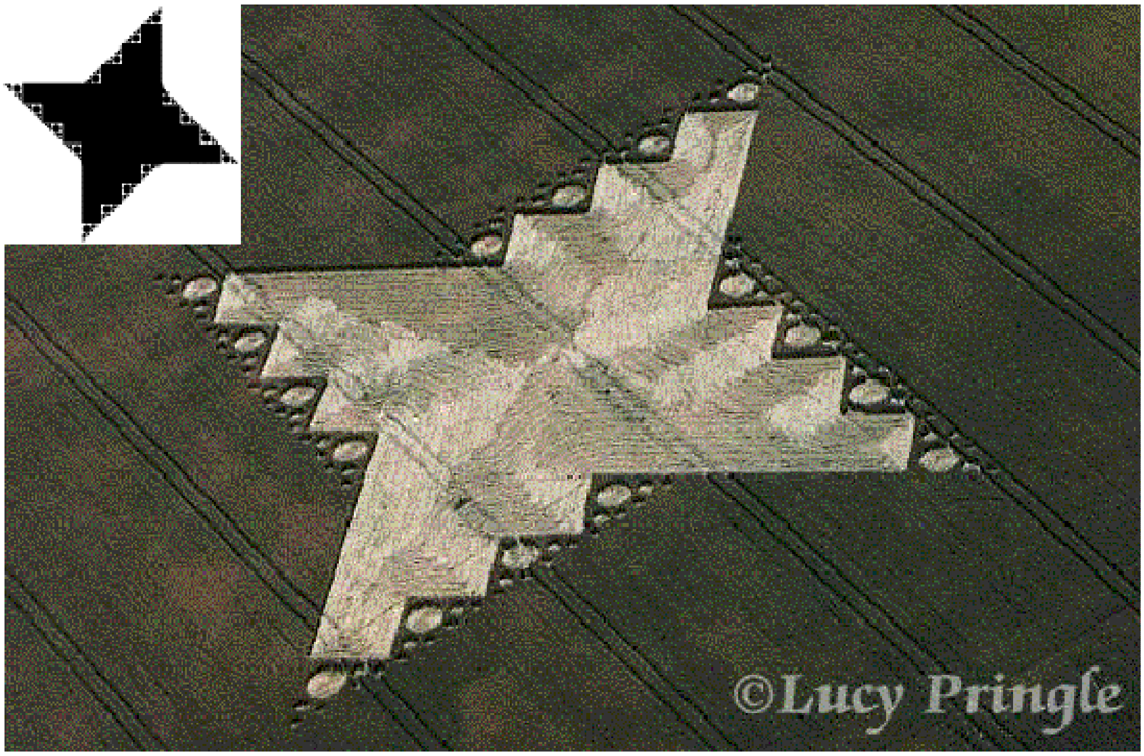
1. WiltShire – Inglaterra – 23 de julho de 1997

Tipo: Curva de Koch

2. WiltShire – Inglaterra – 8 de agosto de 1997



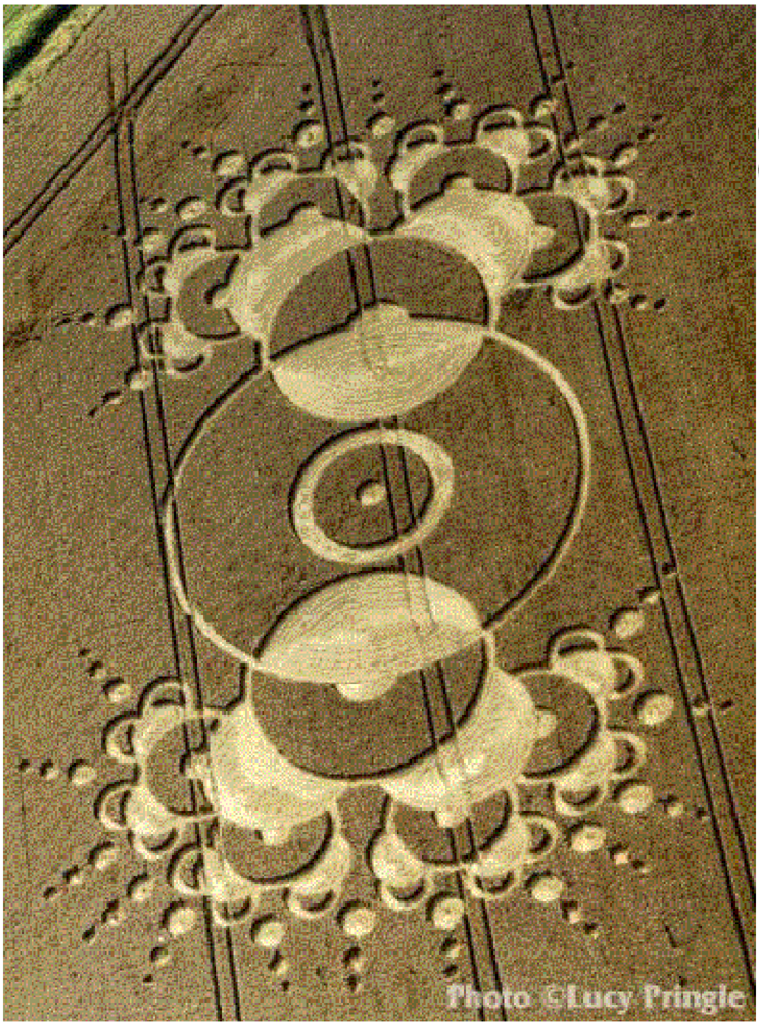
3.

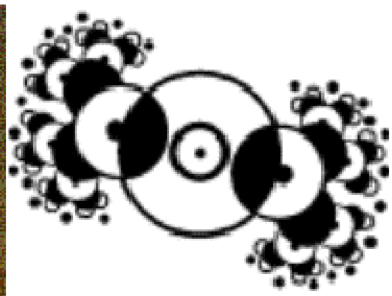


WiltShire – Inglaterra – 24 de julho de 1999

Tipo: Complexo fractal que foi obtido em computador (imagem à esquerda superior) a partir de uma equação complexa.

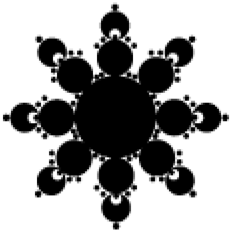
4.





HampShire – Inglaterra – 13 de agosto de 2000

5. WiltShire – Inglaterra – 1 de setembro de 1997



Estas imagens acima aparecem ao acaso em plantações de trigo e cana de açúcar, quem as faz, ou são pessoas perfeitas, ou são seres de outros mundos, uma vez que o fenômeno esteja ligado à ciência da ufologia.

A grande maioria desses fenômenos acontece na Inglaterra, onde o estudo destes desenhos foram levados a sério e comparados com formas geométricas já existentes na nossa matemática.

CONCLUSÃO:

Procurei mostrar nesta pequena pesquisa, que o assunto números complexos, desde sua descoberta até a sua concretização e total aceitação entre os matemáticos, hoje, os números complexos fazem parte de nossa vida diretamente ou indiretamente.

Os números complexos estão presentes na matemática, na física, engenharia e até mesmo relacionados à ciências não oficiais, como é o caso citado acima nas curiosidades, a ufologia.

A intenção desse trabalho não foi apresentar inúmeras fórmulas e longos cálculos demonstrando toda a aplicação matemática dos números complexos, foi mostra que a partir deles, podem ser obtidos muitos efeitos visuais, neste caso os fractais e algumas curiosidades envolvendo eles, fenômenos.

Sabemos que, além de belas imagens para se apreciares, os fractais são utilizados muitas vezes para descrever algum evento caótico, para explicar fenômenos da natureza, como por exemplo o formato das nuvens, de uma montanha, etc.. Além de serem usados para estudo de fenômenos naturais, os fractais tem uma grande aplicação na medicina, estudos de correntes cerebrais são transformados em gráficos fractais para posteriores estudos, análises de impulsos elétricos nos nervos, tendões e demais regiões do corpo também utilizam essas imagens. Hoje, cogita-se utilizar fractais para estudar fenômenos extra-terrestres, como movimentos de galáxias, cometas, asteróides, são novos campos que estão se abrindo para a implementação de números complexos.